

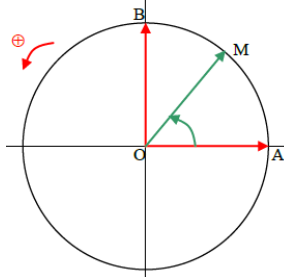
CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Formules de transformations

I) RAPPELLES

1) Cercle trigonométrique

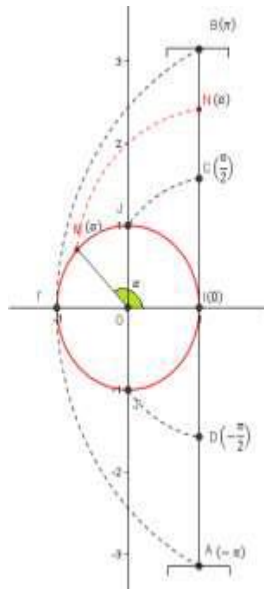
Définition : Le cercle trigonométrique est un cercle de centre O l'origine du plan de rayon $R = 1$ orienté une orientation positive. et admet une origine I



2) Les abscisses curvilignes

1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T

Soit (C) le cercle trigonométrique d'origine I ; considérons l'intervalle $]-\pi, \pi]$ tel que O l'abscisse de I sur l'axe perpendiculaire sur (OI) . Si on fait enrouler le segment qui représente $]-\pi, \pi]$ au tour du cercle (C) on remarque que chaque point N d'abscisse α de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ s'associe avec un point unique M du cercle trigonométrique.



Le réel α s'appelle l'abscisse curviligne principale du point M

et inversement si α est un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi]$, alors il existe un point M unique de (C) qui s'associe avec le point $N(\alpha)$. Le réel α représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique $[IOM]$

1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

Considérons le cercle trigonométrique (C) d'origine I . (Δ) est la droite Passant par I et perpendiculaire à (OI) et d'unité égale à OJ .

Soit M un point sur le cercle (C) et d'abscisse curviligne principale α .

Si on suppose que la droite (Δ) est un file qu'on peut enrouler autour du cercle (C)

on remarque que la point M du cercle (C) coïncide avec une infinité de points de la droite (Δ) ; et qui ont pour abscisses

... .. $(\alpha - 6\pi), (\alpha - 4\pi), (\alpha - 2\pi), (\alpha), (\alpha + 2\pi) \dots$

En générale : chaque point N_k de la droite (Δ) qui coïncidera avec le point M aura pour abscisse $\alpha + k2\pi$ Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle (C) .

Définition : Soit M un point sur le cercle (C) et d'abscisse curviligne principale α . Les réels qui s'écrivent de la forme $:\alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle (C) .

II) TRANSFORMATION DE $\cos(x - y)$ ET CONSEQUENCES.

1) Formules de l'addition :

Activité : Soit M et N deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes Respectifs x et y .

- 1- Calculer $\overline{OM} \cdot \overline{ON}$ de deux façons différentes.
- 2- En déduire $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
- 3- Calculer $\cos(x + y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y .
- 4- Calculer $\sin(x + y)$ et $\sin(x - y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y .

Propriété1 : Pour tous réels x et y on a :

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \quad (1) \\ \cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (2) \\ \sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (3) \\ \sin(x - y) &= \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \quad (4) \end{aligned}$$

Exemple : 1) Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

2) Calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

3) monter que : $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

4) monter que : $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x = 0$

Solution :

1) $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$2) \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$3) \left(\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \cos x \text{ ?}$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 2 \times \frac{1}{2} \cos x = \cos x$$

$$4) \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \cos x = \sin x \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \cos x$$

$$\sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \cos x = \sin x \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \cos x$$

$$\sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x = -2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$$

Exercice1 :

Soient : $0 < a < \frac{\pi}{2}$ et $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $\cos a = \sin b = \frac{1}{2}$

1) Calculer : $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Solution : calcul de $\cos b$:

$$\text{on a } \cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \cos^2 b = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$\cos^2 b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Or : } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

calcul de : $\sin a$

$$\text{on a : } \cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$\text{donc : } \sin^2 a = \frac{3}{4} \text{ donc } \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{or } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) on a : $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$$\text{Donc : } \sin(a+b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Exercice2 : Calculer $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

2) Formules d'angle double.

D'après propriété 1 ligne (2) on a :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ et on sait que } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x.$$

D'après Propriété 1 ligne (3) on a :

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

Propriété 2 : Pour tout réel x on a :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (1)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad (2)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x \quad (3)$$

Exemple : calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$

Solution : on a $\frac{\pi}{4} = 2 \frac{\pi}{8}$ donc $\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(2 \frac{\pi}{8} \right)$

D'après : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (1)$

On a Donc : $\cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ donc :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \text{ ou } \cos \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{Or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

D'après : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad (2)$

On a Donc : $\cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8}$ donc :

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{donc : } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \text{ ou } \sin \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{Or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ donc : } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice3 : Sachant que $\sin x = \frac{1}{2}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$

calculer : $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

Solution : on a : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$$\text{Donc : } \cos(2x) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Et on a : $\sin(2x) = 2\sin x \times \cos x$ il faut Calculer $\cos x$?

on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ Donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\text{Donc : } \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ donc : } \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\text{donc : } \cos x = \frac{\sqrt{8}}{3} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{or } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos x = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{donc : } \sin(2x) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{8}}{9}$$

Exercice4 : Montrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x-x)}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin(2x)}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2 \end{aligned}$$

3) Formules du demi-angle.

D'après : propriété 2 ligne (1) et (2) on a :

Propriété 3 : Pour tous réels x et y on a :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (2)$$

D'après propriété 2

Propriété 4 : $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$ (1)

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2) \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (3)$$

Exemple : montrer que :

$$1) 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$$

2) si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sin \alpha \neq -1$ alors

$$\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Solution :

$$1) \text{ on a : } 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{Car : } \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2) \text{ et } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$\text{Donc : } 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$$

$$2) \text{ on a : } 1 - \sin \alpha = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\text{Donc : } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} \right)$$

$$\text{Donc : } \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} \right)} = \tan^2 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} \right)$$

Exercice 5 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1) \sin^2 2x - \cos 2x - 1 = -2 \cos^2 x \times \cos 2x$$

$$2) 2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 5 \cos 2x + 7$$

Solution :

$$1) \sin^2 2x - \cos 2x - 1 = (2 \cos x \sin x)^2 - 2 \cos^2 x + 1 - 1$$

$$4 \cos^2 x \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -2 \cos^2 x \cos 2x$$

$$2) 2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 12(1 - \sin^2 x) = -10 \sin^2 x + 12$$

$$= \frac{-10}{2}(1 - \cos 2x) + 12 = -5(1 - \cos 2x) + 12 = 5 \cos 2x + 7$$

4) Formules de la tangente.

Soient x et y deux réels tels que: $(x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$$\text{si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ alors : } \cos x \cdot \cos y \neq 0$$

$$\tan(x + y) = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y}$$

$$\text{si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

On en déduit que : si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Si $(x - y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$$

Propriété 5: Soient x et y deux réels tels que :

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

1) Si $(x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y}$ (1)

2) si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ alors : $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ (2)

3) Si $(x - y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors :

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$$
 (3)

Applications : Calculer $\tan \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{5\pi}{12}$

Solution :

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

Exercice6 : Calculer $\tan \frac{11\pi}{12}$

Exercice7 :

1- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) utiliser le déterminant Δ

2) utiliser : $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ (2) on remplaçant : $x = \frac{\pi}{8}$

5) Les valeurs trigonométrique en fonction de :

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

1) D'après Propriété 5 (2) et si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

et $x \neq \pi + 2k\pi$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \text{On posant : } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

on en déduit : $\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$

2) D'après Propriété 4 (1) on a : $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

et on sait : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

par suite : $\cos x = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1$

si $x \neq \pi + 2k\pi$ alors : on peut conclure que :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

On posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

D'après Propriété 4 (3) on a : $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

si $x \neq \pi + 2k\pi$

Alors on peut conclure que : $\sin x = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$

d'où : $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ On posant : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on

en déduit : $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$

Propriété 6: Soit x un réel tel que : $x \neq \pi + 2k\pi$ on a :

1) $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ (1)

2) $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ (2)

Si de $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \pi + 2k\pi$

3) $\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$ (3)

Application: soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{2}$

Calculer $\cos a$ et $\sin a$ et $\tan a$

Solution : on a $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{3}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2} = -2\sqrt{2}$$

Exercice8 : 1- Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

$$(E): 2\cos x - 2\sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation (E)

(remarquer que $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$)

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

6) Transformations des sommes en produits

De la propriété 1 et de (1)+(2) on peut conclure que :

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

Si on pose : $x - y = p$ et $x + y = q$ alors on peut

$$\text{déduire : } x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

On peut conclure que :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De la propriété 1 et de (1)-(2) on peut conclure que :

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = -2\sin x \cdot \sin y$$

Si on pose : $x - y = p$ et $x + y = q$ alors on peut

$$\text{déduire : } x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

Propriété 7: Pour tous réels p, q , on a :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Application : Transformer en produits les expressions suivantes :

1) $A(x) = \sin 2x + \sin 4x$

2) $B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

Solution : 1)

$$A(x) = \sin 2x + \sin 4x = 2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$$

$$\sin 2x + \sin 4x = 2\sin 3x \cos(-2x) = 2\sin 3x \cos 2x$$

2) on a :

$$\cos x + \cos 3x = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cos 2x \cos x$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right) = 2\cos 3x \cos x$$

$$\text{Donc : } B(x) = 2\cos 2x \cos x + 2\cos 3x \cos x = 2\cos x (\cos 2x + \cos 3x)$$

$$\text{Et on a : } \cos 2x + \cos 3x = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$$

$$\text{Donc : } B(x) = 4\cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$$

Exercice9 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété 1 et de (1)+ (2) on peut conclure que :

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2\cos x \cdot \cos y \text{ d'où :}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

Propriété : Pour tous réels x, y on a :

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

Application : écrire sous la forme d'une somme

1) $\cos 2x \times \sin 4x$ 2) $\sin x \times \sin 3x$ 3) $\cos 4x \times \cos 6x$

Solution :

$$1) \cos 2x \times \sin 4x = \frac{1}{2} (\sin(2x+4x) - \sin(2x-4x)) = \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin(-2x))$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x) = \frac{1}{2} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$2) \sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos(x+3x) - \cos(x-3x)) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(-2x))$$

$$\sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(2x)) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$3) \cos 4x \times \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos(4x+6x) + \cos(4x-6x)) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos(-2x))$$

$$\cos 4x \times \cos 6x = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

Exercice 10 : calculer

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} \quad 2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$$

Solution :

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \pi + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

$$2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\sin \pi + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

Exercice 11 : Montrer que

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{11} \right)$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = -2 \cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{11} \right)$$

$$3) \text{ en d\u00e9duire que: } \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = -\frac{\tan \left(\frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left(\frac{2\pi}{11} \right)}$$

Solution :

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(-\frac{2\pi}{11} \right) = 2 \sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11}$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \cos \left(\frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(-\frac{2\pi}{11} \right) = -2 \cos \frac{5\pi}{11} \sin \frac{2\pi}{11}$$

$$3) \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = -\frac{2 \sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{11} \right)}{-2 \cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{11} \right)}$$

$$= -\frac{\sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{11} \right)}{\cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{11} \right)} = -\tan \left(\frac{5\pi}{11} \right) \times \frac{1}{\tan \left(\frac{2\pi}{11} \right)} = -\frac{\tan \left(\frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left(\frac{2\pi}{11} \right)}$$

Exercice 12 : Montrer que $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x \times \tan x$

Solution : on a :

$$\cos 2x - \cos 4x = -2 \sin \left(\frac{2x+4x}{2} \right) \sin \left(\frac{2x-4x}{2} \right) = 2 \sin(3x) \sin x$$

$$\text{et } \cos 2x + \cos 4x = -2 \cos \left(\frac{2x+4x}{2} \right) \cos \left(\frac{2x-4x}{2} \right) = 2 \cos 3x \cos x$$

$$\text{donc : } \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \frac{2 \sin 3x \sin x}{2 \cos 3x \cos x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \tan 3x \times \tan x$$

$$\text{car : } \cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

Exercice 13: Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = -\sin 4x \times \sin x$$

Solution :

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = \left(\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) \left(\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right)$$

$$\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos \left(\frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = 2 \cos(2x) \cos \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = -2 \sin \left(\frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = -2 \sin(2x) \sin \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } \cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = 2 \cos(2x) \cos \left(\frac{x}{2} \right) \times -2 \sin(2x) \sin \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$= -2 \cos(2x) \times \sin(2x) \times 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} \right) = -\sin(4x) \sin x$$

Exercice 14: Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1) \sin 3x = \sin x \times (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$2) \cos 3x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$3) c \cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$4) \sin(4x) = 4 \sin x (2 \cos^2 x - \cos x)$$

$$5) \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x)$$

Solution :

$$1) \sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ = 2 \sin x \cos^2 x + (1-2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x (1-\sin^2 x) + (1-2 \sin^2 x) \sin x \\ = 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$2) \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x \\ = \cos x (2 \cos^2 x - 1) + \sin x \times 2 \cos x \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x \\ = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x \\ = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$3) c \cos(4x) = c \cos(2 \times 2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 \\ = 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$4) \sin(4x) = 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 4 \sin x (2 \cos^3 x - \cos x) \\ \sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \times 2 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1)$$

$$5) \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x) \text{ ??}$$

Methode 1

$$\frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(x+2x)) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x)$$

$$= \frac{1}{4}(3\cos x + \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin x \sin x \cos x)$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 3\cos x) = \frac{1}{4}(4\cos^3 x) = \cos^3 x$$

Methode 1

$$\cos^3 x = \cos^2 x \times \cos x = \frac{1+\cos 2x}{2} \times \cos x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 2x \times \cos x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2}\left(\cos x + \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

Exercice 15: $P(x) = \sin 2x - \sin x$ et $Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$

Montrer que : $P(x) = \sin x(2\cos x - 1)$ et

$$Q(x) = \cos x(2\cos x + 1)$$

Solution :

$$Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x = 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 = \cos x + 2\cos^2 x = \cos x(1 + 2\cos x)$$

$$P(x) = \sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$$

Exercices 16:

1- Linéariser : $2\cos^2 x \cdot \sin(2x)$

2- Linéariser : $\cos^3 x$

III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles

1.1 $\cos x = a$

Propriété : Considérons l'équation (E) $\cos x = a$ où a est un réel :

1) si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation $\cos x = 1$ sont les réels $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation $\cos x = -1$ sont les réels $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]0, \pi[$ qui vérifie $\cos \alpha = a$ et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera :

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $\cos(A(x)) = \cos(B(x))$ sont les solutions des équations $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $A(x) = -B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercices 17 : 1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$

1.2 $\sin x = a$

Propriété :

Considérons l'équation (E') $\sin x = a$ où a est un réel :

1) si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation $\sin x = 1$ sont les réels :

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

3) les solutions de l'équation $\sin x = -1$ sont les réels-

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ qui vérifie } \sin \alpha = a \text{ et l'ensemble des}$$

solutions de l'équation (E') sera :

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $\sin(A(x)) = \sin(B(x))$ sont les solutions des équations : $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ Ou $A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercices 18 :

$$1. \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation : } \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$

1.3 $\tan x = a$

Propriété : Pour tout réel a , il existe un et un seul réel

$$\alpha \text{ dans l'intervalle } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ qui vérifie } \tan \alpha = a ,$$

et l'équation $\tan x = a$ aura comme ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.

En général l'équation : $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$

est définie pour les réel x tels que :

$$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et a pour solution}$$

l'ensemble des réels x solution de l'équation :

$$A(x) = B(x) + k\pi$$

Exercices19 :

1) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

Exercices20 :1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équations

suyvantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équations suivantes :

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes :

$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

Solution : 1) on a $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ssi

$2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Ssi $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ Ssi

$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) on a $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ ssi

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

ssi $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$:

$0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1$ Donc $-\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36}$ Donc

$-0,29 \leq k \leq 1,2$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

Pour $k = 1$ on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

• Encadrement de $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

$0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1$ Donc $-\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24}$ Donc

$-0,54 \leq k \leq 0,04$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

• Donc $S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ est définie ssi

$2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ssi $2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$

ssi $2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi$ ssi $x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}$ Donc

$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ Donc

$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ssi $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + k\pi$ ssi

$2x = \frac{9\pi}{20} + k\pi$ ssi $x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}$ donc

$-\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20}$ Donc

$-1,45 \leq k \leq 0,55$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ ou $k = -1$

Pour $k = 0$ on trouve $x_1 = \frac{9\pi}{40}$

Pour $k = -1$ on trouve $x_2 = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{2} = -\frac{11\pi}{40}$

Donc $S = \left\{ -\frac{11\pi}{40}; \frac{9\pi}{40} \right\}$

2) L'équation : (E): $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Si $abc = 0$ l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Soient a et b deux réels non nuls on a :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

Or : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$

donc : Il existe un réel φ tel que :

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Par suite :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x)$$

et d'après la formule d'addition

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

2.2 L'équation : (E): $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Soit a, b et c trois réels non nuls :

$$a \cos x + b \sin x + c = 0 \Leftrightarrow a \cos x + b \sin x = -c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) = -c$$

où $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ça revient à l'étude d'une équation usuelle.

Propriété : Soient a et b deux réels tels que :

$(a, b) \neq (0, 0)$ on a pour tout réel x :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) \text{ où le réel } \varphi \text{ est}$$

déterminer par : $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

L'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$ se ramène à :

$$\cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple1 : $\cos x - \sin x$ $a=1$ et $b=-1$

calculons : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

Exemple2 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

Solution : Transformation de : $\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$b=1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$

Exercices21 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) + 2 = 0$$

IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Rappelles

1.1) Inéquations avec cos

Exemple : Considérons l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$

Tout d'abord il faut résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$

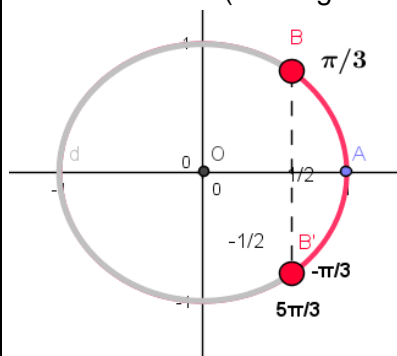
les images des solutions de cette équation sont :

$M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et on constate que les réels qui

vérifient l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$

sont les abscisse curvilignes des points qui se situent

sur l'arc $M'M$ (en rouge sur la figure)



et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi, \pi]} = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont :

$$S_{[0, 2\pi]} = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$$

Exercices22 : Résoudre dans $[0, 3\pi]$ l'inéquation :

$$2\cos x + \sqrt{3} \leq 0$$

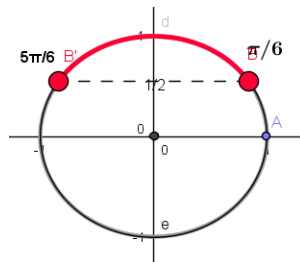
1.2) Inéquations avec sin

Exemple : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation

suiivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ ssi $\sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$

donc $S = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$



1.3) Inéquation avec tan

Exemple1 : Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation

suiivante : $\tan x - 1 \geq 0$

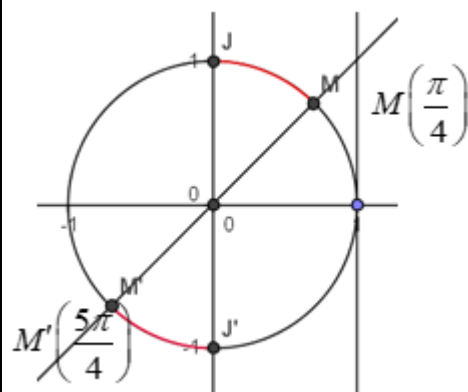
On a $\tan x - 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq 1$

On sait que : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ Les arc MJ et $M'J'$ en rouge

correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie

$\tan x - 1 \geq 0$ Donc

$$S = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$$

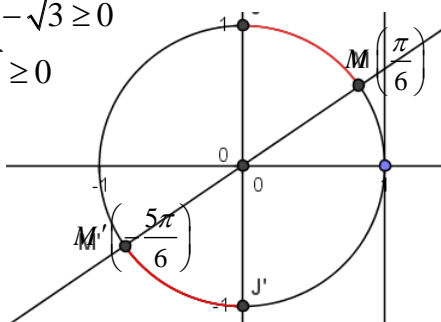


Exemple2 : Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation

suiivante : $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

On a $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

ssi $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$



On sait que : $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous

les points $M(x)$ tq x vérifie $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$ Donc

$$S = [-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$$

Exercices23 : 1) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$$

2) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1$$

Solution : Transformation de : $\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$b = -1$ et $a = \sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$:

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $-1 \leq -\frac{1}{2} + 2k \leq 1$

Donc $-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{2}$

• Encadrement de $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$$

Donc $-1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 1$

$$\text{Donc } -\frac{7}{6} \leq 2k \leq \frac{5}{6} \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$$

$$\text{Donc } k=0 \text{ on trouve } x_2 = \frac{\pi}{6}$$

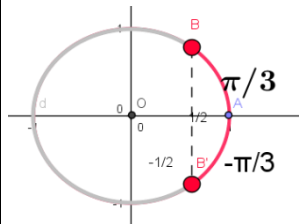
$$\text{Donc } S_{[-\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right\}$$

2) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1 ?$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \geq 1 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{On pose : } X = x + \frac{\pi}{6} \text{ donc } \cos X \geq \frac{1}{2}$$



$$\cos X \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$S_{[-\pi; \pi]} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right]$$

Exercices24 : 1) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équations suivantes : $2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante :

$$2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 \leq 0$$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation suivante :

$$(2 \cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$$

solution: 1) a) on pose $t = \sin x$

$$2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi } 2t^2 - 9t - 5 \leq 0$$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$$

$$\text{Les racines sont : } t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ et}$$

$$t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5 \text{ Donc } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = 5$$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans \mathbb{R}

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \text{ ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi$$

$$\text{ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\bullet \text{ Encadrement de } -\frac{\pi}{6} + 2k\pi : 0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$$

$$\text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12} \text{ Donc}$$

$$0,08 \leq k \leq 1,02 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k=1$$

Pour $k=1$ on remplace on trouve

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

$$\bullet \text{ Encadrement de } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi : 0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$$

$$\text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12} \text{ Donc}$$

$$-0,5 \leq k \leq 0,41 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k=0 \text{ on remplace on trouve } x_2 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{Donc } S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

1) b) $2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 \leq 0$ ssi

$$2 \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) (\sin x - 5) \leq 0$$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$

$$\text{Donc } \sin x - 5 < 0$$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors

$$2 \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) (\sin x - 5) \leq 0 \text{ ssi } \sin x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\text{ssi } \sin x \geq -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

$$\text{tq } x \text{ vérifie } \sin x \geq -\frac{1}{2}$$

donc $S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

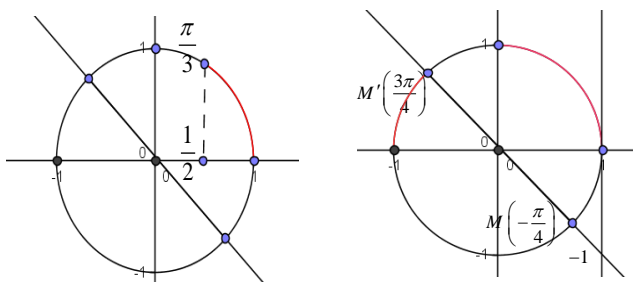
2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ est définie

dans $[0; \pi]$ ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Donc $D = [0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x - 1 \geq 0$ ssi $\cos x = \frac{1}{2}$ ssi $\cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq -1$ ssi $\tan x \geq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$



x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2\cos x - 1$	+	0	-	-	-
$\tan x + 1$	+	+	-	0	+
$(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$	+	-	-	+	-

donc $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice25 :

1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$

Exercice26 :

Résoudre dans $\left[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}\right]$ l'équation $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$

Exercice27 :: soit $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

1) calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

Et calculer $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3a) Résoudre dans $I = [-\pi; \pi]$ l'équation: $A(x) = \frac{1}{2}$

3b) Résoudre dans I l'inéquation: $A(x) \leq \frac{1}{2}$

Solution : 1)

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x$
 $= \cos x(2\cos^2 x - 1) + \sin x \times 2\cos x \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x$
 $= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$
 $= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

2) $A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 3(\sin x + \cos x) = 4\cos^3 x$

3a) $A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{1}{8} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$

Car : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = 0 \\ X = \cos x \end{cases}$

Puisque : $\Delta < 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans \mathbb{R} donc :

$A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

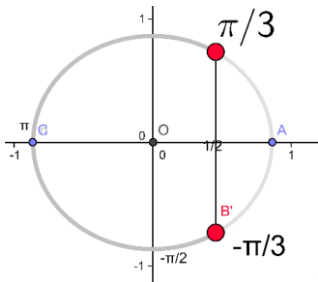
$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $S_{[-\pi; \pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$

3b) $A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) \leq 0$

Puisque : $\Delta < 0$ alors $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} > 0$

Donc : $A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$



donc $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice 28 : on pose :

$$A = \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$$

1) monter que : $\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$

2) monter que : $\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

3) en déduire que : $A = \frac{3}{16}$

Solution :

On a : $\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$

1): $\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = -\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) - \cos \left(-\frac{3\pi}{9} \right) \right)$

$$\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$$

Donc : $\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$

2) On a : $\cos a \times \sin b = -\frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$

$$\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Donc : $\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

3) déduction : $A = \frac{3}{16}$?

$$A = \left(\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien



$$A = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\sin \left(\pi - \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{3}{16} \text{ Donc : } A = \frac{3}{16}$$

Exercice 29: soit : $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5$

1) monter que : $5\sin \theta - 3\cos \theta = 3$

2) déduire la valeur de : $\cos \theta$ et $\sin \theta$

Solution : 1) $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin \theta = 5 - 5\cos \theta$

$$\Leftrightarrow 3\sin \theta = 5(1 - \cos \theta) \Leftrightarrow 3\sin \theta = 5 \times 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Car : $1 - \cos \theta = 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$

Donc: $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin \theta = 10\sin^2 \frac{\theta}{2}$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 6\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 10\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Car : $\sin \theta = 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 6\cos \frac{\theta}{2} = 10\sin \frac{\theta}{2} \text{ car } \sin \frac{\theta}{2} \neq 0$$

Donc : $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$

Or on sait que : $\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$ et $\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$

$$\text{Donc : } 3\sin \theta + 5\cos \theta = \frac{5 \left(2 \tan \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{3 \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = \frac{10 \times \frac{3}{5}}{1 + \frac{9}{25}} - \frac{3 \left(1 - \frac{9}{25} \right)}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{102}{34} = 3$$

2) on a le systeme: $\begin{cases} 3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \\ 5\sin \theta - 3\cos \theta = 3 \end{cases}$ on le résolvant on

trouve: $\cos \theta = \frac{8}{17}$ et $\sin \theta = \frac{15}{10}$